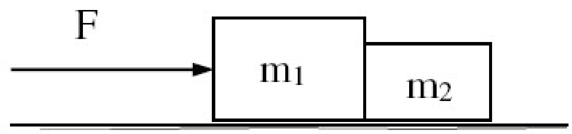
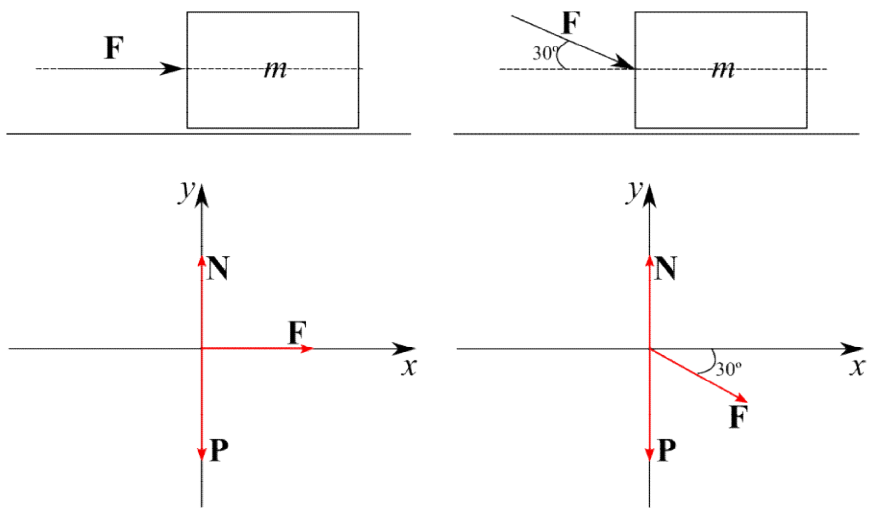
4. Dos bloques están en contacto sobre una mesa como muestra la figura. Si se le aplica una fuerza constante: 1) horizontal y 2) formando un ángulo de 30° con la horizontal, despreciando el rozamiento calcular:



a) La aceleración que adquiere el sistema en cada caso.
b) La fuerza de interacción entre ambos cuerpos.
DATOS: F= 20 N; m_1 = 2 kg y m_2 = 3 kg

a) Cálculo de la aceleración
Para calcular la aceleración del sistema, trataremos a los dos cuerpos como uno solo, cuya masa total es $m = m_1 + m_2$. Para cada caso plantearemos los ejes coordenados y dibujaremos el diagrama de cuerpo libre.

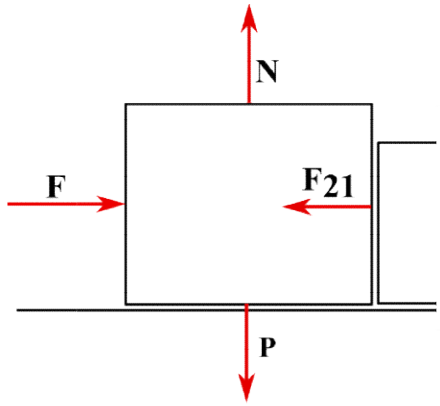


Teniendo en cuenta las fuerzas que actúan sobre cada eje, podemos plantear:

Caso 1: Fuerza aplicada horizontal:
Teniendo en cuenta que el cuerpo no se acelera en el eje *y*, pero si en el eje *x*,
$\sum F_y = N - P = 0$ (1)
$\sum F_x = F = ma$ (2)
De la ecuación para *x* obtenemos:
$\frac{F}{m} = a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1+m_2} = \frac{20}{2Kg+3} \Rightarrow a = 4\frac{m}{s^2}$

Caso 2: Fuerza aplicada con ángulo de 30° con la horizontal:
$\sum F_y = N - P - Fsen30 = 0$ (3)
$\sum F_x = Fcos30 = ma$ (4)
De la ecuación para *x* obtenemos:
$\frac{Fcos30}{m} = a \Rightarrow a = \frac{Fcos30}{m_1+m_2} = \frac{20Ncos30}{2Kg+3kg} \Rightarrow a \cong 3{,}46\frac{m}{s^2}$
Notar que este es un caso donde la normal no es igual al peso.

b) Cálculo de la fuerza de interacción entre los cuerpos
Veamos ahora lo que sucede sobre uno de los cuerpos que compone el sistema, en particular, el cuerpo 1:



El cuerpo 2 ejerce una fuerza $\boldsymbol{F}_{21}$ sobre el cuerpo 1, y el cuerpo 1 ejerce una fuerza $\boldsymbol{F}_{12}$ sobre el cuerpo 2; ambas son iguales en módulo pero tienen sentidos contrarios, y surgen de la interacción entre ambos cuerpos: son un par acción-reacción. Cuando consideramos a ambos cuerpos como un solo sistema no tomamos en cuenta estas fuerzas, porque se cancelan una con la otra.

Entonces, planteemos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo 1.

Caso 1:

Sobre el eje *x* (horizontal):

$\sum F_x = F - F_{21} = ma$ (5)

Sobre el eje *y* sigue valiendo la ecuación (1). La aceleración de cada cuerpo es igual a la aceleración del sistema, que calculamos en la primera parte del problema. Reemplazando por los valores que ya conocemos,

$$20N - F_{21} = 2Kg\,4\frac{m}{s^2}$$

$$20N - 2Kg\,4\frac{m}{s^2} = F_{21} \Rightarrow F_{21} = 12N \text{ (en módulo)}$$

Finalmente,

$-\boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{F}_{12} = 12N\,\check{\imath}$

Comprobemos que en el segundo cuerpo efectivamente la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ vale 12N. Para ello escribimos la sumatoria de fuerzas en el eje *x* para el cuerpo 2. Tengamos en mente que la aceleración es la misma para los dos cuerpos porque se mantienen en contacto:

$$\sum F_x = F_{12} = ma = 3Kg\,4\frac{m}{s^2} = 12N$$

Caso 2:

Sobre el eje *x* (horizontal):

$\sum F_x = F cos30 - F_{21} = ma$ (5)

Nuevamente, sobre el eje *y* sigue valiendo la ecuación (3).

$$20N cos30 - F_{21} = 2Kg\,3.64\frac{m}{s^2}$$

$$20N cos30 - 2Kg\,3.46\frac{m}{s^2} = F_{21} \Rightarrow F_{21} = 10.4N \text{ (en módulo)}$$

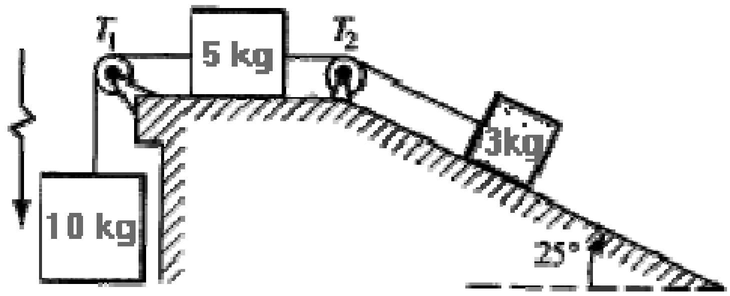
Entonces,

$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12} = 10.4N\,\check{\imath}$

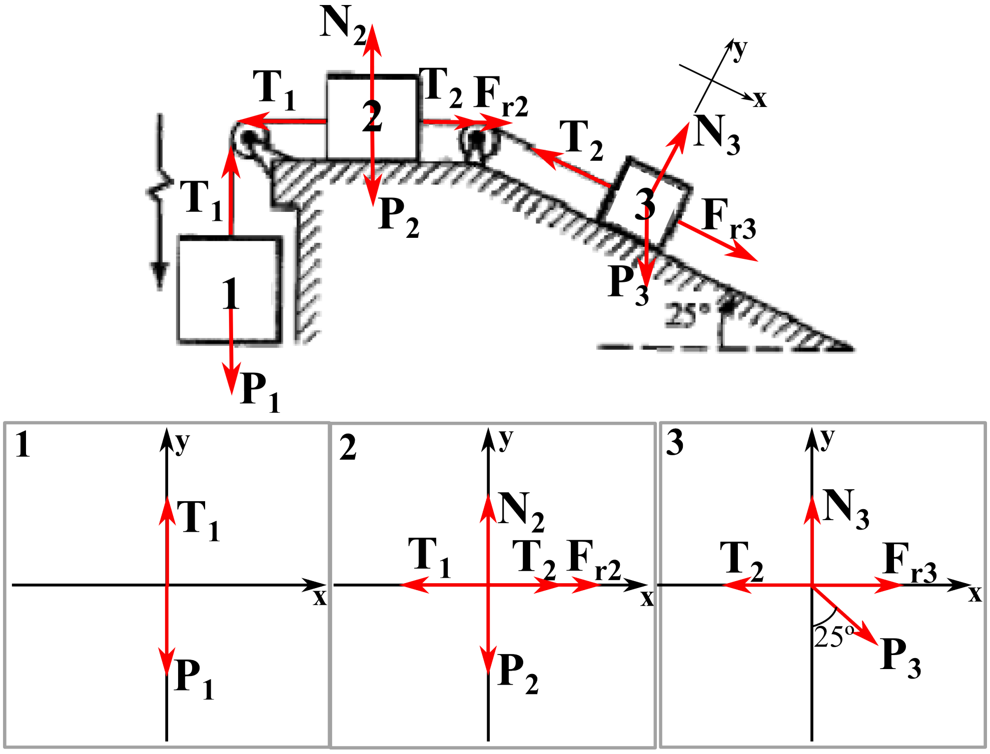
14. Los tres bloques de la figura están conectados por medio de cuerdas ligeras que pasan sobre poleas sin fricción. La aceleración del sistema es de 2 m/s2 y las superficies son rugosas. Calcule

a) las tensiones en las cuerdas y

b) el coeficiente de rozamiento cinético entre los bloques y las superficies. (Suponga el mismo coeficiente de rozamiento para ambos bloques)

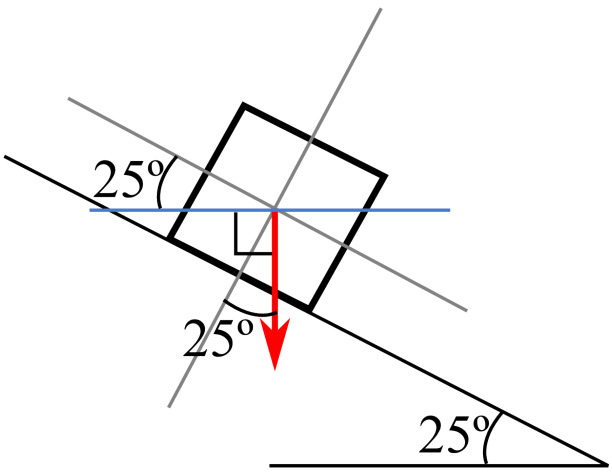


Empezamos viendo qué fuerzas actúan sobre el sistema. Sobre el cuerpo de 10 Kg, solo actúan el peso y la tensión. No hay fuerza de roce ni normal, porque el cuerpo no está apoyado sobre ninguna superficie. Sobre el cuerpo de 5 Kg actúan las fuerzas peso y normal en la dirección vertical y las dos tensiones y la fuerza de roce en la dirección horizontal. La fuerza de roce siempre irá en dirección contraria al movimiento (notemos que el problema nos indica que el cuerpo de masa 10 Kg desciende) . Por último, sobre el cuerpo de 3 Kg actúan el peso (dirigido hacia el centro de la Tierra, que en este caso significa que se dirige hacia el piso), la normal (perpendicular al plano) y las fuerzas de roce y la tensión, paralelas al plano. En el siguiente esquema se observan las fuerzas sobre los cuerpos y el correspondiente *diagrama del cuerpo libre* (DCL) para cada uno:



Los ejes coordenados para los cuerpos 1 y 2 los ubicamos como lo hacemos tradicionalmente: eje y vertical, positivo hacia arriba, y eje x horizontal, positivo a la derecha. En el cuerpo 3, para facilitarnos luego las cuentas, rotamos el sistema de ejes para que el eje x quede paralelo a la superficie por donde desliza el cuerpo.

¿Por qué es de 25°el ángulo entre el eje y negativo y la fuerza peso? En el siguiente esquema se ve más claramente la relación entre los ángulos.



Una forma fácil de comprobar que es el ángulo correcto, es pensar ¿si el ángulo de la pendiente se hiciera muy pequeño, cuál de los ángulos decrecería: el que hace la fuerza con el eje x o con el eje y?

Una vez identificadas todas las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo, vamos a plantear la segunda Ley de Newton componente a componente, para cada cuerpo:

Cuerpo 1 (masa: 10 Kg):

$\sum F_x = 0$ (no hay fuerzas que actúen sobre este eje)

$\sum F_y = T_1 - P_1 = m_1(-a)$ (1)

Cuerpo 2 (masa: 5 Kg):

$\sum F_x = T_2 + F_{r2} - T_1 = m_2(-a)$ (2)

$\sum F_y = N_2 - P_2 = 0$ (3)

Cuerpo 3 (masa: 3Kg):

$\sum F_x = F_{r3} + P_{3x} - T_2 = m_3(-a)$ (4)

$\sum F_y = N_3 - P_{3y} = 0$ (5)

donde P_{3x} y P_{3y} son las componentes del peso en las direcciones x e y. Notar que todos los cuerpos poseen la misma aceleración a, negativa porque hemos tomado el eje $+y$ en dirección contraria al movimiento.

Sabemos que a la fuerza peso la podemos escribir como $P = mg$, y la fuerza de roce es proporcional a la normal: $F_r = \mu N$. Reemplazando en las ecuaciones anteriores, y escribiendo las proyecciones del peso sobre cada eje para el cuerpo 3, podemos reescribir:

(1) $T_1 - m_1 g = -m_1 a$

(2) $T_2 + \mu N_2 - T_1 = -m_2 a$

(3) $N_2 - m_2 g = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g$

(4) $\mu N_3 + m_3 g sen25 - T_2 = -m_3 a$

(5) $N_3 - m_3 g cos25 = 0 \Rightarrow N_3 = m_3 g cos25$

Reemplazando en las ecuaciones (2) y (4) las expresiones de las normales obtenidas de las ecs (3) y (5), y haciendo algunos pasajes de términos, llegamos a:

(1) $T_1 = m_1(g - a)$

(2) $T_2 - T_1 = -m_2 a - \mu m_2 g = -m_2(a + \mu g)$

(4) $T_2 = m_3 a + \mu m_3 g cos25 + m_3 g sen25 = m_3[a + g(\mu cos25 + sen25)]$

Reemplazando por los datos que nos da el problema, en la ecuación (1):

$T_1 = 10Kg(9.8\frac{m}{s^2} - 2\frac{m}{s^2}) \Rightarrow \boxed{T_1 = 78N}$

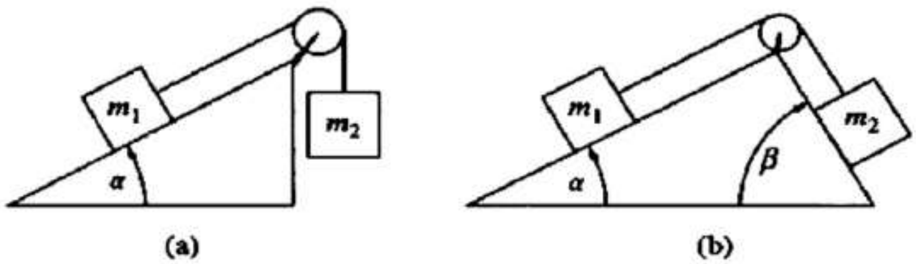
Igualmente, de la ecuación (2)

$T_2 - 78N = -5Kg(2\frac{m}{s^2} + \mu 9.8\frac{m}{s^2}) \Rightarrow \boxed{\mu \simeq 0.655}$

Finalmente, de la ecuación (4),

$T_2 = 3Kg[2\frac{m}{s^2} + 9.8\frac{m}{s^2}(0.655cos25 + sen25)] \Rightarrow \boxed{T_2 \simeq 35.88N}$

15. (a) Un cuerpo de 25 kg se desliza en un plano inclinado α= 30°, y está unida mediante una cuerda que pasa por una polea, a otro cuerpo suspendido libremente de 40 kg. Hallar: la aceleración del sistema, suponiendo que el μ_k=0.2. (b) Determine la aceleración con que se moverán los cuerpos de la figura y la tensión de la cuerda cuando hay fricción, siendo μ_1= 0.12 en la superficie donde está apoyada m_1 y μ_2= 0.10 en la superficie donde está apoyada m_2.



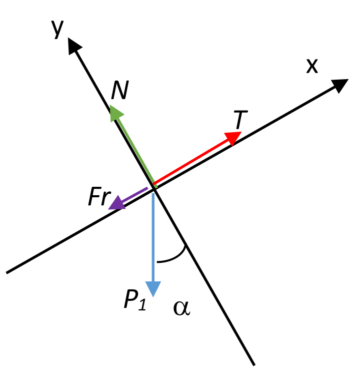
Explique todos los movimientos posibles. Datos: m_1= 20 kg, m_2= 18 kg, α= 30°, β= 60°.

<u>Resolveremos el inciso a.</u>

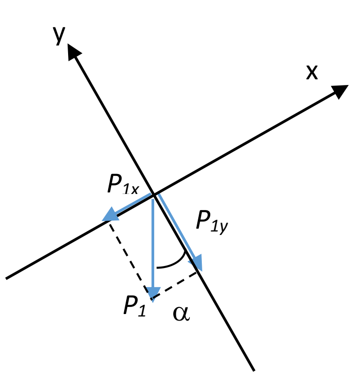
En este problema dos cuerpos conectados por una cuerda se mueven. En primer lugar hay que suponer un sentido de movimiento: supondremos que el cuerpo 1 se mueve hacia la derecha y el cuerpo 2 cae.

Empezaremos por analizar las fuerzas del cuerpo 1. En el mismo, confluyen la tensión de la cuerda T hacia la derecha, el peso P_1, la normal N perpendicular a la superficie y la fuerza de rozamiento Fr hacia la izquierda. Usaremos un sistema de ejes xy de manera que el eje x sea paralelo a la superficie y positivo hacia la derecha. Así, la aceleración será positiva hacia la derecha.

Diagrama de cuerpo libre para el cuerpo 1.



Dibujaremos de nuevo la fuerza peso para descomponer en el eje x y eje y.



Aplicando la ecuación de sumatoria de fuerzas igual a masa por aceleración en el eje x:

$$\sum F_x = m_1 a_{x1}$$

$$T - P_1\ sen\ \alpha - Fr = m_1 a_{x1} \tag{1}$$

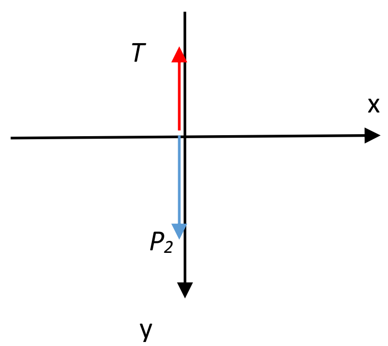
Y en el eje y:

$$\sum F_y = m_1 a_{y1}$$

$$N - P_1 cos\ \alpha = m_1 a_{y1} = 0 \tag{2}$$

En el cuerpo 2 las fuerzas presentes solo son la tensión y el peso. Supondremos el eje y vertical y positivo hacia abajo.

Diagrama de cuerpo libre para el cuerpo 2.



La sumatoria de fuerzas en este eje queda entonces:

$$\sum F_y = m_2 a_{y2}$$

$$P_2 - T = m_2 a_{y2} \tag{3}$$

Notar que el valor de la tensión es el mismo para los dos cuerpos. Además la cuerda es inextensible (no se estira) y se considera sin masa, por lo que la aceleración de ambos cuerpos es igual, $a_{x1} = a_{y2} = a$

De las ecuaciones 1, 2 y 3 se puede encontrar la aceleración. Primero en la ecuación 1 se puede escribir $Fr = \mu_k N$ y despejar N de la ecuación 2. Entonces la ecuación 1 se puede reescribir:

$$T - P_1\, sen\, \alpha - \mu_k P_1 cos\, \alpha = m_1 a \tag{4}$$

Recordando que $P_1 = m_1 g$ y $P_2 = m_2 g$, entonces en las ecuaciones 3 y 4 las únicas incógnitas son T y a.

Reemplazando la ecuación 4 en la 3:

$$P_2 - P_1\, sen\, \alpha - \mu_k P_1 cos\, \alpha - m_1 a = m_2 a \tag{5}$$

Despejando a

$$\frac{m_2 g - m_1 g\, sen\, \alpha - \mu_k m_1 g cos\, \alpha}{m_1 + m_2} = a \tag{6}$$

El valor obtenido es de 3,5 m/s^2. La aceleración es positiva, es decir que los cuerpos aumentaran la velocidad, en el sentido de movimiento supuesto.

Si el sentido de movimiento fuera el opuesto, es decir el cuerpo 1 se mueve a la izquierda y el cuerpo 2 sube, se tendrían las mismas fuerzas, solo que la fuerza de rozamiento cambia de dirección. Por lo tanto, las ecuaciones de las sumatorias de fuerzas son, para el cuerpo 1 en x:

$$T - P_1\, sen\, \alpha + Fr = m_1 a_{x1} = m_1 a \tag{7}$$

La ecuación en el eje y no cambia.

La sumatoria de fuerzas para el cuerpo 2 tampoco cambia (notar que aunque hemos cambiado el sentido de giro no hemos cambiado los ejes).

Reemplazando se llega a:

$$P_2 - P_1\, sen\, \alpha + \mu_k P_1 cos\, \alpha - m_1 a = m_2 a \tag{8}$$

$$\frac{m_2 g - m_1 g\, sen\, \alpha + \mu_k m_1 g cos\, \alpha}{m_1 + m_2} = a \tag{9}$$

Se llega al valor a =4,8 m/s^2. Sin embargo, notar que al no cambiar de sentido los ejes, una aceleración positiva (hacia la derecha) indica que los cuerpos se van a desacelerar ya que el movimiento es hacia la izquierda.

Concluyendo, si los cuerpos se mueven hacia la derecha los mismos se aceleraran. Si los cuerpos se mueven hacia la izquierda se frenaran (o desaceleraran).

¿Qué pasa si los cuerpos inicialmente están en reposo?

En ese caso tendríamos un rozamiento estático entre el bloque 1 y la superficie, con un coeficiente de rozamiento estático μ_e que generalmente es mayor que el coeficiente dinámico.

Si analizamos la ecuación 6 vemos que para que la aceleración sea igual a cero, la fuerza de rozamiento $Fr = \mu_e m_1 g cos\, \alpha$ debe ser igual a $m_2 g - m_1 g\ sen\, \alpha$. En ese caso si los cuerpos inicialmente están en reposo se mantendrían así. Notar que hemos usado μ_e en lugar de μ_k.
Si la fuerza de rozamiento es menor que $m_2 g - m_1 g\ sen\, \alpha$ entonces el cuerpo tendrá una aceleración y se comenzará a mover. Como $m_2 g - m_1 g\ sen\, \alpha$ es positivo entonces el cuerpo 1 se comenzará a mover hacia la derecha.
Si la fuerza de rozamiento es mayor que $m_2 g - m_1 g\ sen\, \alpha$ entonces los cuerpos no se moverán.